

基于隔离集的不含给定特征值的图构造*

杨慧如, 段芳, 李晓娟

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017

摘要: 设 G 是 n 阶简单图, μ 是 G 的一个特征值, 其重数为 k , H 是删除 G 的 k 个点的集合 X 得到的 G 的导出子图. 若 μ 不是 H 的特征值, 那么就称 H 是图 G 关于特征值 μ 的星补, X 是图 G 关于特征值 μ 的星集. 星集常用于研究某个给定特征值 μ 的重数问题. 本文基于星集定义了两个特殊的隔离集, 并讨论其在不以给定实数 μ 作为特征值的图的结构刻画问题中的作用.

关键词: 隔离集; 星集; 星补; 特征值重数; 图结构刻画

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(XXXX)XX-0001-07

Graph construction without a given eigenvalue based on isolation sets

Yang Huiru, Duan Fang, Li Xiaojuan

School of Mathematics Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China

Abstract: Let G be a simple graph, μ be an eigenvalue of G with multiplicity k , and H be the induced subgraph of G obtained by deleting a set X of k vertices. If μ is not an eigenvalue of H , then H is called the star complement in G for μ , and X is called the star set in G for μ . Star sets are commonly used to study the multiplicity problem for a given eigenvalue μ . This paper defines two special isolation sets based on star sets and discusses their role in characterizing the structure of graphs that do not have a given real number μ as an eigenvalue.

Key words: isolation sets; star set; star complement; eigenvalue multiplicity; graph structure characterization

令 $G = (V, E)$ 是有限且无向的简单图, 这里 V 和 E 分别表示 G 的点集和边集. 若 $|V| = n$, 也称 G 是阶数为 n 的图. 如果点 u 和点 v 在 G 中相邻, 则可表示为 $u \sim v$. 对于任意 $v \in V$, 用 $N_G(v)$ 表示在 G 中与 v 相邻的点的集合. 设非空集合 $X \subseteq V(G)$, 用 $G[X]$ 表示由 X 中的点导出的 G 的子图, 即 $G[X] = (X, E')$, 其中边集 E' 由边集 E 中两个端点均属于 X 的所有边组成. $G[V(G) \setminus X]$ 可简记为 $G - X$. n 阶单位矩阵 I_n 定义为主对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0 的方阵, 简记为 I (上下文明确时). 用 P_n 和 C_n 分别表示阶数为 n 的路和圈.

n 阶图 G 的邻接矩阵表示为 n 阶方阵 $A(G) = (a_{ij})$, 如果点 i 和点 j 在 G 中相邻则 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 图 G 的特征值定义为其邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值, 由于 $A(G)$ 为实对称矩阵, 其所有特征值均为实数, 将其按非递增顺序排列为 $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$. 图 G 的正特征值的个数称为图 G 的正惯性指数, 表示为 $p^+(G)$, 负特征值的个数称为图 G 的负惯性指数, 表示为 $n^-(G)$. 用 $m(G, \mu)$ 表示图 G 的给定特征值 μ 的重数, 特别地, 用 $\eta(G)$ 表示图 G 的零特征值的重数, 称为图 G 的零度. 图 G 的秩指的是 G 中非零特征值的个数, 用符号 $r(G)$ 表

* 收稿日期: 2026-01-14

录用日期: 2026-05-21

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金 (12561064)

作者简介: 杨慧如 (2002 年生), 女; 研究方向: 图谱理论; E-mail: 107622024210484@stu.xjnu.edu.cn

通信作者: 段芳 (1979 年生), 女; 研究方向: 图谱理论; E-mail: 107622007010014@xjnu.edu.cn

全文阅读



ZR20260018

示. 若 $r(G) = n$, 则 $|A(G)| \neq 0$, 这时称 n 阶图 G 是非奇异的(可逆的).

星补这个定义由 Ellingham(1993)和 Rowlinson(1993)各自独立提出, 在研究特征值重数问题上是非常有效的工具. 设 μ 是 G 的特征值, 且 $m(G, \mu) = k$, 若 H 是删除图 G 的 k 个点的集合 X 得到的 G 的导出子图, 且 μ 不是 H 的特征值, 那么就称 H 是图 G 关于特征值 μ 的星补, X 是图 G 关于特征值 μ 的星集. 同时, G 被称为 H 的扩展或者 μ 扩展. 对于图 G 的任意给定特征值 μ , 图 G 关于 μ 的星集和星补都存在. 当 μ 不等于 0 和 -1 时, 只存在有限的包含 μ 的星补的图, 而当 μ 等于 0 或 -1 时, 这样的图是无限的(Cvetković et al., 2009). 利用星集这个工具, Cvetković et al.(2004)确定了最小特征值大于等于 -2 的图; Cvetković et al.(1999)通过特征值 -2 或 1 的星补刻画了线图 and 它们的补图; Yuan et al.(2017)确定了以完全三部图 $K_{1,1,1}$ 作为星补的正则图; Rowlinson(2018)和 Rowlinson et al.(2010)研究了正则图中的星补; Jackson et al.(1999)刻画了以完全二部图作为星补的图; Wang et al.(2019)给出了以完全多部图作为星补的正则图, Yuan et al.(2018)研究了以星图作为关于特征值 -2 的星补的极大图. 此外, Stanić(2008)开发了一组程序 SCL 用于快速实现星补技术.

星集常用于研究某个给定特征值 μ 的重数问题, 近三十年, 用星集和星补作为工具研究关于特征值的重数问题已经取得了一系列重要成果. Stanić(2025)开发了一种基于星补的算法, 用于刻画给定秩或给定不同于 -1 的特征值个数的图并且刻画了至多有 6 个不同于 -1 的特征值的图. 受这篇文章启发, 本文基于星集定义了两个特殊的隔离集, 并讨论其在不以给定实数 μ 作为特征值的图的结构刻画问题中的作用.

1 相关引理

本节列举出后面用到的一些定义和结论, 首先介绍与星集和星补相关的两个重要结论.

定理 1(Cvetković et al., 2009) 设图 $G = (V, E)$, 取点集 $X \subset V$ 且 $|X| = k$, 令图 G 的邻接矩阵为 $A(G) = \begin{pmatrix} A(G[X]) & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$, 其中 $C = A(G - X)$. 那么 X 是图 G 关于特征值 μ 的星集当且仅当 μ 不是 $G - X$ 的特征值且 $\mu I - A(G[X]) = B^T(\mu I - C)^{-1}B$.

推论 1(Cvetković et al., 2009) 设图 $G = (V, E)$, 取点集 $X \subset V$ 且 $|X| = k$, 令图 G 的邻接矩阵为 $A(G) = \begin{pmatrix} A(G[X]) & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$, 其中 $C = A(G - X)$. 对矩阵 B 中任意列向量 b_u 和 b_v , 定义 $\langle b_u, b_v \rangle = b_u^T(\mu I - C)^{-1}b_v$. 那么 X 是图 G 关于特征值 μ 的星集当且仅当

$$\langle b_u, b_v \rangle = \begin{cases} \mu, & u = v, \\ -1, & u \sim v, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

将多项式按降幂排列, 写出其非零系数序列, 当两个相邻的非零系数的符号不同(即一正一负)时, 定义为该序列的一次符号变化. 多项式非零系数序列符号变化的总数称为该序列的符号变化次数.

引理 1(笛卡尔符号法则) 设多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_i \in \mathbf{R}, i = 0, 1, \cdots, n$ 且 $a_n \neq 0$, 则 $P(x)$ 的正实数根的个数等于其非零系数序列的符号变化次数, 或比其小一个正偶数.

定义 1 设 A, B 是实对称矩阵, 若存在可逆矩阵 S , 使得 $B = S^T A S$, 则称 B 与 A 合同.

引理 2(Sylvester 惯性定律) 设 A, B 是实对称矩阵, 若 B 与 A 合同, 则 A, B 具有相同的正负惯性指数和零度.

推论 2 设 A, B 是实对称矩阵. 如果 $\mu I - A$ 与 B 合同, 那么 B 的正惯性指数等于 A 的比 μ 小的特征值个数; B 的负惯性指数等于 A 的比 μ 大的特征值个数; B 的零度等于 A 的特征值 μ 的重数.

定义 2 设 A 是 n 阶方阵, A 的迹定义为它的主对角线元素之和, 表示为 $\text{tr } A$.

引理 3(居余马, 2002) 对于任意 n 阶方阵 A , 全体特征值的乘积等于 A 的行列式 $|A|$, 全体特征值的和等

于 A 的迹 $\text{tr } A$.

2 主要结论

引理 4 设图 $G = (V, E)$, $X \subset V$. 令 G 的邻接矩阵为 $A = \begin{pmatrix} A(G[X]) & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$, 其中 $C = A(G - X)$. 若实数 μ 不是 $G - X$ 的特征值, 则 $\mu I - A$ 合同于

$$A' = \begin{pmatrix} \mu I - A(G[X]) - B^T(\mu I - C)^{-1}B & O \\ O & \mu I - C \end{pmatrix}.$$

证明 因为实数 μ 不是 $G - X$ 的特征值, 所以 $\mu I - C$ 可逆. 对于矩阵

$$\mu I - A = \begin{pmatrix} \mu I - A(G[X]) & -B^T \\ -B & \mu I - C \end{pmatrix},$$

存在可逆矩阵 $S = \begin{pmatrix} I & O \\ (\mu I - C)^{-1}B & I \end{pmatrix}$ 使得

$$S^T(\mu I - A)S = \begin{pmatrix} \mu I - A(G[X]) - B^T(\mu I - C)^{-1}B & O \\ O & \mu I - C \end{pmatrix} = A'.$$

由定义 1 可得 $\mu I - A$ 与 A' 合同. 证毕.

下面给出图 G 关于给定实数 μ 的隔离集的定义.

定义 3 设图 $G = (V, E)$, $X \subset V$. 若图 G 不含实数 μ 作为特征值, 且 μ 也不是图 $G - X$ 的特征值, 那么就称 X 是图 G 关于实数 μ 的隔离集. 特别地, 若在图 G 的谱中, 相较于子图 $G - X$, 新增特征值中大于 μ 的个数与小于 μ 的个数相等, 则称 X 是图 G 关于 μ 的等元隔离集, 若在图 G 的谱中, 相较于子图 $G - X$, 新增特征值中大于 μ 的个数与小于 μ 的个数相差 1, 则称 X 是图 G 关于 μ 的近似等元隔离集.

本节首先刻画个数为 2 或 3 的点集作为图 G 关于实数 μ 的隔离集的充要条件. 再利用这些充要条件给出隔离集在不含实数 μ 作为特征值的图结构刻画问题中的作用, 并给出相应的算法以及例子.

设图 $G = (V, E)$, 取点集 $X \subset V$, 下面几个定理的证明中总将图 G 的邻接矩阵表示为 $A = \begin{pmatrix} A(G[X]) & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$, 其中 $C = A(G - X)$. 给定一个实数 μ , 总设矩阵 $\mu I - C$ 可逆, 这也说明 μ 不是 $G - X$ 的特征值. 用符号 $b_x (x \in X)$ 表示矩阵 B 的列向量, 定义 $\langle b_x, b_y \rangle = b_x^T(\mu I - C)^{-1}b_y$.

定理 2 设图 $G = (V, E)$, 取点集 $X = \{u, v\} \subset V$. 给定实数 μ , 若 $\langle b_u, b_u \rangle = \langle b_v, b_v \rangle = \mu$, 则点集 X 是图 G 关于给定实数 μ 的等元隔离集当且仅当 $\mu I - A(G[X]) \neq B^T(\mu I - C)^{-1}B$.

证明 因为实数 μ 不是 $G - X$ 的特征值. 根据引理 4, $\mu I - A$ 合同于

$$A' = \begin{pmatrix} \mu I - A(G[X]) - B^T(\mu I - C)^{-1}B & O \\ O & \mu I - C \end{pmatrix}.$$

再根据引理 2 可知矩阵 $\mu I - A$ 和 A' 有相同的正、负惯性指数和零度.

必要性: 用反证法. 若 $\mu I - A(G[X]) = B^T(\mu I - C)^{-1}B$, 则 A' 和 $\mu I - A$ 均以 0 作为特征值, 因此由推论 2 可得图 G 以实数 μ 作为特征值. 根据定义 3, 这与 X 是图 G 关于实数 μ 的等元隔离集矛盾. 因此 $\mu I - A(G[X]) \neq B^T(\mu I - C)^{-1}B$.

充分性: 设 $A(G[X]) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, 这里 a 等于 0 或 1, 则 $\mu I - A(G[X]) = \begin{pmatrix} \mu & -a \\ -a & \mu \end{pmatrix}$. 另一方面,

$$B^T(\mu I - C)^{-1}B = \begin{pmatrix} b_u^T \\ b_v^T \end{pmatrix}(\mu I - C)^{-1} \begin{pmatrix} b_u \\ b_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle b_u, b_u \rangle & \langle b_u, b_v \rangle \\ \langle b_v, b_u \rangle & \langle b_v, b_v \rangle \end{pmatrix}.$$

注意到 $B^T(\mu I - C)^{-1}B$ 是一个实对称矩阵, 所以可以令 $\langle b_u, b_u \rangle = \langle b_v, b_v \rangle = b$. 即

$$B^T(\mu I - C)^{-1}B = \begin{pmatrix} \mu & b \\ b & \mu \end{pmatrix}.$$

再令 $\mu I - A(G[X]) - B^T(\mu I - C)^{-1}B = M$, 则有

$$M = \begin{pmatrix} \mu & -a \\ -a & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & b \\ b & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a-b \\ -a-b & 0 \end{pmatrix}.$$

由题意知 $\mu I - A(G[X]) \neq B^T(\mu I - C)^{-1}B$, 所以 $M \neq O$, 即 $-a-b \neq 0$. 将 M 的两个特征值设为 λ_1, λ_2 , 根据引理 3 可得 $\lambda_1\lambda_2 = |M| = -(a+b)^2 \neq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } M = 0$, 因此 M 不以 0 作为特征值且其特征值为一正一负, 即 A' 相对于 $\mu I - C$ 正、负惯性指数各增加 1, 因此 $\mu I - A$ 相对于 $\mu I - C$ 正、负惯性指数也各增加 1, 由推论 2 可得 G 相对于 $G-X$ 比 μ 大和比 μ 小的特征值各增加 1, 即 X 是图 G 关于实数 μ 的等元隔离集. 证毕.

推论 3 设图 $G = (V, E)$, 取点集 $X = \{u, v\} \subset V$. 给定一个实数 μ , 若 $\langle b_u, b_u \rangle = \langle b_v, b_v \rangle = \mu$, 则点集 X 是图 G 关于实数 μ 的等元隔离集当且仅当若 u, v 相邻, 则 $\langle b_u, b_v \rangle \neq -1$ 且若 u, v 不相邻, 则 $\langle b_u, b_v \rangle \neq 0$.

证明 设 $A(G[X]) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, 这里 a 等于 0 或 1, 则 $\mu I - A(G[X]) = \begin{pmatrix} \mu & -a \\ -a & \mu \end{pmatrix}$. 注意到 $B^T(\mu I - C)^{-1}B$ 是一个实对称矩阵, 所以可令 $\langle b_u, b_v \rangle = \langle b_v, b_u \rangle = b$. 即 $B^T(\mu I - C)^{-1}B = \begin{pmatrix} \mu & b \\ b & \mu \end{pmatrix}$. 因此 $\mu I - A(G[X]) \neq B^T(\mu I - C)^{-1}B$ 成立当且仅当 $\begin{pmatrix} \mu & -a \\ -a & \mu \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \mu & b \\ b & \mu \end{pmatrix}$, 即 $b \neq -a$. 根据定理 2 可知, 点集 X 是图 G 关于实数 μ 的等元隔离集当且仅当 $b \neq -a$.

必要性: 因为点集 X 是图 G 关于实数 μ 的等元隔离集, 所以 $b \neq -a$. 若 u, v 相邻, 即 $a = 1$, 那么 $\langle b_u, b_v \rangle \neq -1$ 且若 u, v 不相邻, 即 $a = 0$, 那么 $\langle b_u, b_v \rangle \neq 0$. 得证.

充分性: 若 u, v 相邻, 即 $a = 1$, 则 $\langle b_u, b_v \rangle \neq -1$ 且若 u, v 不相邻, 即 $a = 0$, 则 $\langle b_u, b_v \rangle \neq 0$, 这就意味着 $b \neq -a$, 因此 X 是图 G 关于实数 μ 的等元隔离集. 证毕.

下面刻画个数为 3 的点集作为图 G 关于实数 μ 的隔离集的充要条件.

定理 3 设图 $G = (V, E)$, 取点集 $X = \{u, v, w\} \subset V$. 给定实数 μ , 若对任意 $x \in X$ 都有 $\langle b_x, b_x \rangle = \mu$, 那么点集 X 是图 G 关于实数 μ 的近似等元隔离集当且仅当对任意 $x, y \in X$, 若 x, y 相邻, 则 $\langle b_x, b_y \rangle \neq -1$, 且若 x, y 不相邻, 则 $\langle b_x, b_y \rangle \neq 0$.

证明 因为 μ 不是 $G-X$ 的特征值. 根据引理 4, $\mu I - A$ 合同于

$$A' = \begin{pmatrix} \mu I - A(G[X]) - B^T(\mu I - C)^{-1}B & O \\ O & \mu I - C \end{pmatrix}.$$

再根据引理 2 可知矩阵 $\mu I - A$ 和 A' 有相同的正、负惯性指数和零度. 设

$$A(G[X]) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 a_{12}, a_{13}, a_{23} 等于 0 或 1, 则

$$\mu I - A(G[X]) = \begin{pmatrix} \mu & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & \mu & -a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & \mu \end{pmatrix}.$$

注意到 $B^T(\mu I - C)^{-1}B$ 是一个实对称矩阵, 所以对 X 中任意两个点 x, y , 可以令 $\langle b_x, b_y \rangle = \langle b_y, b_x \rangle = b_{xy}$. 因而根据已知条件可得

$$B^T(\mu I - C)^{-1}B = \begin{pmatrix} \mu & b_{uw} & b_{uv} \\ b_{uw} & \mu & b_{vw} \\ b_{uv} & b_{vw} & \mu \end{pmatrix},$$

再令 $\mu I - A(G[X]) - B^T(\mu I - C)^{-1}B = M$, 即有

$$M = \begin{pmatrix} \mu & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & \mu & -a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu & b_{uw} & b_{vw} \\ b_{uw} & \mu & b_{vw} \\ b_{uw} & b_{vw} & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} - b_{uw} & -a_{13} - b_{vw} \\ -a_{12} - b_{uw} & 0 & -a_{23} - b_{vw} \\ -a_{13} - b_{uw} & -a_{23} - b_{vw} & 0 \end{pmatrix}.$$

设 M 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 由引理 3 可得

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = |M| = -2(a_{12} + b_{uw})(a_{13} + b_{vw})(a_{23} + b_{vw}).$$

充分性: 因为对任意 $x, y \in X$, 若 x, y 相邻, 则 $\langle b_x, b_y \rangle \neq -1$, 且若 x, y 不相邻, 则 $\langle b_x, b_y \rangle \neq 0$, 所以 $a_{12} + b_{uw}, a_{13} + b_{vw}, a_{23} + b_{vw}$ 全都不等于 0, 因此 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$, 即 M 不以 0 作为特征值. 经计算可得

$$\begin{aligned} |\lambda I - M| &= \begin{vmatrix} \lambda & a_{12} + b_{uw} & a_{13} + b_{vw} \\ a_{12} + b_{uw} & \lambda & a_{23} + b_{vw} \\ a_{13} + b_{uw} & a_{23} + b_{vw} & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - \left[(a_{12} + b_{uw})^2 + (a_{13} + b_{vw})^2 + (a_{23} + b_{vw})^2 \right] \lambda + 2(a_{12} + b_{uw})(a_{13} + b_{vw})(a_{23} + b_{vw}). \end{aligned}$$

当 $(a_{12} + b_{uw})(a_{13} + b_{vw})(a_{23} + b_{vw}) > 0$ 时, 系数序列为 $(+, -, +)$, 符号变化次数为 2, 根据引理 1, M 的正特征值为两个或零个. 因为 M 的迹为 0, 根据引理 3 可得 M 必有正特征值, 因此 M 的正、负特征值个数分别为 2 和 1, 即 A' 相对于 $\mu I - C$ 的正、负惯性指数分别增加 2 和 1. 再根据推论 2 可得 G 相对于 $G - X$ 比 μ 大和比 μ 小的特征值个数分别增加 1 和 2; 当 $(a_{12} + b_{uw})(a_{13} + b_{vw})(a_{23} + b_{vw}) < 0$ 时, 系数序列为 $(+, -, -)$, 符号变化次数为 1, 所以 M 的正、负特征值个数分别为 1 和 2, 同理可得 G 相对于 $G - X$ 比 μ 大和比 μ 小的特征值个数分别增加 2 和 1. 综上所述, X 是图 G 关于实数 μ 的近似等元隔离集.

必要性: 因为点集 X 是图 G 关于实数 μ 的近似等元隔离集, 所以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 都不等于 0, 否则 $\mu I - A$ 相对于 $\mu I - C$ 将增加 0 作为特征值, 由推论 2, 这时 G 相对于 $G - X$ 将增加实数 μ 作为特征值, 与 X 是关于实数 μ 的隔离集矛盾. 因此 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -2(a_{12} + b_{uw})(a_{13} + b_{vw})(a_{23} + b_{vw}) \neq 0$, 这就意味着对任意 $x, y \in X$, 若 x, y 相邻, 则 $\langle b_x, b_y \rangle \neq -1$, 且若 x, y 不相邻, 则 $\langle b_x, b_y \rangle \neq 0$. 证毕.

基于推论 3 和定理 3 刻画的有关图 G 的隔离集的充要条件, 下面给出不含给定实数 μ 作为特征值的图的构造算法. 注意到根据该算法, 添加点后的图仍然不以实数 μ 作为特征值, 因此该算法可以持续进行.

算法: 基于点数为 2 和 3 的隔离集构造不含实数 μ 作为特征值的连通图

输入: 不以实数 μ 作为特征值的连通图 H .

输出: 不以实数 μ 作为特征值的连通图 G , 且 G 的点数比 H 的点数多 2 或 3.

- 1) 令 U 为与 H 中至少一个点相邻, 且满足 $\langle b_z, b_z \rangle = \mu$ 的所有点 z 构成的集合;
- 2) (i) 取点集 $X = \{u, v | u, v \in U\}$, X 中的点和 H 的连边关系在图 G 中已确定. 若 $\langle b_u, b_v \rangle = -1$, 则 u, v 在图 G 中不相邻, 若 $\langle b_u, b_v \rangle = 0$, 则 u, v 在图 G 中相邻, 且若 $\langle b_u, b_v \rangle \neq -1$ 且 $\langle b_u, b_v \rangle \neq 0$, 则 u, v 在图 G 中既可以相邻也可以不相邻.
- (ii) 取点集 $X = \{u, v, w | u, v, w \in U\}$, X 中的点和 H 的连边关系在图 G 中已确定. 对任意 $x, y \in X$, 若 $\langle b_x, b_y \rangle = -1$, 则 x, y 在图 G 中不相邻, 若 $\langle b_x, b_y \rangle = 0$, 则 x, y 在图 G 中相邻, 且若 $\langle b_x, b_y \rangle \neq -1$ 且 $\langle b_x, b_y \rangle \neq 0$, 则 x, y 在图 G 中既可以相邻也可以不相邻.

下面利用如上算法给出 $\mu = 0$ 的例子. 将图 H 的点集设为 $V(H) = \{1, 2, \dots, s\}$, 序列 $i_1, i_2, \dots, i_t (t \leq s)$ 表示 $1, 2, \dots, s$ 中 t 个数的一个排列, 下面用符号 $u_{i_1, i_2, \dots, i_t}$ 表示与 H 中点 $i_1, i_2, \dots, i_t$ 相邻的新增点.

例 取图 $H = P_4$ (其顶点按顺序标记为 $1, 2, 3, 4$), 经过验证可知 P_4 不以 0 作为特征值. 下面利用上述算法构造不以 0 作为特征值的连通图 G .

- 1) 经过计算可知 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_{1,3}, u_{2,3}, u_{2,4}, u_{1,2,4}, u_{1,3,4}\}$;

2) 取 $X = \{u_1, u_4 \mid u_1, u_4 \in U\}$ 进行操作, X 中的点和 P_4 的连边关系在图 G 中已确定. 因为 $\langle b_{u_1}, b_{u_4} \rangle \neq 0$ 且 $\langle b_{u_1}, b_{u_4} \rangle \neq -1$, 所以 u_1, u_4 在图 G 中既可以相邻也可以不相邻. 若 u_1, u_4 不相邻, 得到图 $G = P_6$, 若 u_1, u_4 相邻, 得到图 $G = C_6$ (见图 1). 由上述算法可知, 图 G 一定不以 0 作为特征值 (见表 1).

图 1 P_6 和 C_6 Fig.1 P_6 and C_6 表 1 P_6 和 C_6 的特征值Table 1 The eigenvalues of P_6 and C_6

特征值	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
P_6	1.801 9	1.247 0	0.445 0	-0.445 0	-1.247 0	-1.801 9
C_6	2	1	1	-1	-1	-2

根据算法可知图 P_6 和 C_6 仍然不以 0 作为特征值, 因此可以将图 P_6 和 C_6 作为算法中的图 H 继续进行构造. 下面以图 P_6 为例.

令 $H = P_6$ (其顶点按顺序标记为 1, 2, 3, 4, 5, 6), 利用上述算法继续构造不以 0 作为特征值的图 G .

1) 经过计算可知 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_{1,3}, u_{1,5}, u_{2,3}, u_{2,4}, u_{2,5}, u_{2,6}, u_{3,5}, u_{4,5}, u_{4,6}, u_{1,2,4}, u_{1,3,4}, u_{1,3,5}, u_{1,3,6}, u_{1,4,6}, u_{2,3,5}, u_{2,4,5}, u_{2,4,6}, u_{3,4,6}, u_{3,5,6}, u_{1,2,4,5}, u_{1,3,4,5}, u_{1,3,4,6}, u_{2,3,4,6}, u_{2,3,5,6}\}$;

2) 取三个点的 $X = \{u_1, u_{2,6}, u_{1,3,4,5} \mid u_1, u_{2,6}, u_{1,3,4,5} \in U\}$ 作为例子进行验证说明, X 中的点和 P_6 的连边关系在图 G 中已确定. 因为 $\langle b_{u_1}, b_{u_{2,6}} \rangle, \langle b_{u_1}, b_{u_{1,3,4,5}} \rangle$ 和 $\langle b_{u_{2,6}}, b_{u_{1,3,4,5}} \rangle$ 均既不为 0 也不为 -1, 所以 $u_1, u_{2,6}, u_{1,3,4,5}$ 之间的邻接关系无限制, 因此一共可以得到图 $G_1 \sim G_8$ (见图 2) 均不以 0 作为特征值 (见表 2).

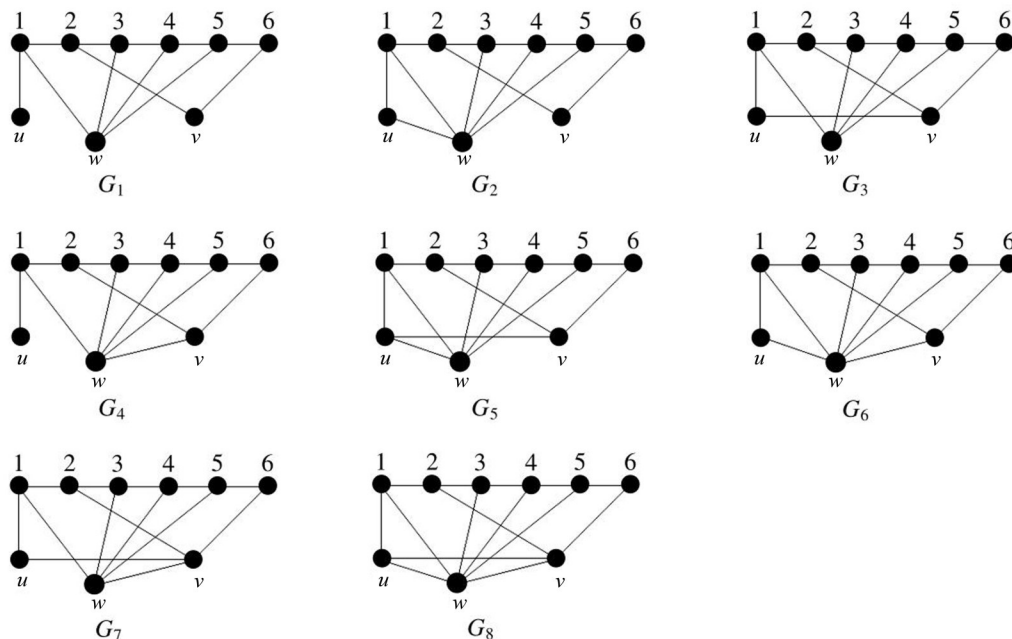
图 2 $G_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ Fig.2 $G_i (i = 1, 2, \dots, 8)$

表2 $G_i(i = 1, 2, \dots, 8)$ 的特征值
Table 2 The eigenvalues of $G_i(i = 1, 2, \dots, 8)$

特征值	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
G_1	2.990 2	1.493 4	1.284 8	0.729 2	-0.507 9	-1	-1	-1.531 8	-2.458 0
G_2	3.188 8	1.414 2	1.414 2	0.834 7	-0.627 2	-1	-1.414 2	-1.414 2	-2.396 2
G_3	3.040 9	1.834 2	1.196 5	0.523 0	-0.234 0	-1	-1.26	-1.487 6	-2.613 1
G_4	3.238 4	1.441 3	1.071 5	0.691 5	-0.367 2	-0.663 9	-1.150 3	-1.486 3	-2.775 1
G_5	3.297 4	1.646 9	1.205 9	0.776 7	-0.251 1	-1	-1.4	-1.827 1	-2.448 7
G_6	3.421 4	1.414 2	1.113 2	0.841 3	-0.379 3	-0.862 6	-1.391 0	-1.414 2	-2.743 0
G_7	3.334 6	1.642 5	1.125 3	0.390 6	-0.253 8	-0.657 8	-1.116 6	-1.506 8	-2.957 9
G_8	3.612 9	1.531 4	1.108 5	0.633 0	-0.167 1	-1.095 2	-1.350 5	-1.506 9	-2.766 0

参考文献:

- 居余马, 2002. 线性代数[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社.
- Cvetković D, Rowlinson P, Simić S, 1999. Some characterizations of graphs by star complements[J]. Linear Algebra Appl, 301 (1/2/3): 81–97.
- Cvetković D, Rowlinson P, Simić S, 2004. Spectral generalizations of line graphs: On graphs with least eigenvalue -2 [M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cvetković D, Rowlinson P, Simić S, 2009. An introduction to the theory of graph spectra[M]. Cambridge: Cambridge University Press.
- Ellingham M N, 1993. Basic subgraphs and graph spectra[J]. Australas J Comb, 8: 247–266.
- Jackson P S, Rowlinson P, 1999. On graphs with complete bipartite star complements[J]. Linear Algebra Appl, 298(1/2/3): 9–20.
- Rowlinson P, 1993. Eutactic stars and graph spectra[M]//Brualdi R A, et al. Combinatorial and graph-theoretical problems in linear algebra. New York: Springer.
- Rowlinson P, 2018. An extension of the star complement technique for regular graphs[J]. Linear Algebra Appl, 557: 496–507.
- Rowlinson P, Tayfeh-Rezaie B, 2010. Star complements in regular graphs: Old and new results[J]. Linear Algebra Appl, 432(9): 2230–2242.
- Stanić Z, 2008. Some star complements for the second largest eigenvalue of a graph[J]. Ars Math Contemp, 1(2): 126–136.
- Stanić Z, 2025. Employing star complements in search for graphs with fixed rank[J]. Linear Algebra Appl, 718: 14–29.
- Wang J, Yuan X Y, Liu L L, 2019. Regular graphs with a prescribed complete multipartite graph as a star complement[J]. Linear Algebra Appl, 579: 302–319.
- Yuan X Y, Chen H Y, Liu L L, 2017. On the characterization of graphs by star complements[J]. Linear Algebra Appl, 533: 491–506.
- Yuan X Y, Zhao Q Q, Liu L L, et al. 2018. On graphs with prescribed star complements[J]. Linear Algebra Appl, 559: 80–94.

(责任编辑 冯兆永)